Ueber die

Bewegung eines materiellen Punktes,

der von einem festen Centrum 0 aus
durch 2 proportional seiner Masse wirkende Kräfte
angegriffen wird,
deren eine anziehend und proportional der Entfernung,
die andere abstoßend und umgekehrt proportional der
3ten Potenz der Entfernung wirkt.

Zur Zeit $t = 0$
habe der Punkt die Geschwindigkeit v_0, deren Richtung
senkrecht ist zum Radius-vector r_0, der Entfernung des
Punktes von 0.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doctorwürde
bei
hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg
eingereicht
von

Carl Dencker,
wissenschaftlicher Hülfslehrer in Oldenburg.

Marburg.
1884.

Zur Lösung unserer vorstehenden Aufgabe betrachten wir erst kurz die allgemeinen Gesetze für die Bewegung eines Körpers unter dem Einflusse einer Centralkraft.

Auf den materiellen Punkt M von der Masse m wirke von dem festen Centrum O aus eine Kraft F, die wir, dem wichtigsten Vorkommen in der Natur, der Einwirkung der Weltkörper auf einander entsprechend, als anziehend annehmen wollen. Wird der Punkt M, der sich zur Zeit $t = o$ in einer gewissen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit v_0 bewege, von keiner Kraft außer der von O aus wirkenden afficirt, so wird seine Bewegung in der durch O und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene vor sich gehen, da ja keine Kraft ihn aus derselben herauszubewegen strebt.

Diese Ebene nehmen wir als Coordinatenebene und den Punkt O zum Mittelpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Zerlegen wir die von O aus wirkende Kraft in zwei nach den Richtungen der negativen Axen wirkende Componenten, von denen P in der Richtung der negativen Axe der X, Q in Richtung der negativen Axe der Y wirke, so sind bekanntlich die Gleichungen für die Bewegung des Punktes M:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -P \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -Q \end{aligned}$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy und addiren, so wird

$$m\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} = -(Pdx + Qdy)$$

Dieses integrirt giebt:

$$m\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int(Pdx + Qdy)$$

Verwandeln wir jetzt unsere rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten, wobei wir O als Pol, OM als Radius-vector, die x-Axe als feste Axe annehmen und den vom Radius-vector und der festen Axe eingeschlossenen Winkel mit ω bezeichnen, so ist

$$x = r\cos\omega \qquad y = r\sin\omega$$
$$P = F\cos\omega \qquad Q = F\sin\omega$$

Transformiren wir hiermit unsere letzte Gleichung, so wird

$$\text{(II)} \qquad m\frac{dr^2 + r^2d\omega^2}{dt^2} = -2\int Fdr$$

oder da $dr^2 + r^2d\omega^2 = ds^2$

und $\frac{ds}{dt} = v$,

$$\text{(III)} \qquad mv^2 = -2\int Fdr$$

Gleichung (III) spricht das Princip der lebendigen Kraft aus; außerdem ist noch das Prinzip der Flächen zu berücksichtigen.

Um dieses zu entwickeln, multipliciren wir von unseren Gleichungen (I) die erste mit y, die zweite mit x und subtrahiren, so ist:

$$m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = Py - Qx$$

$$m\frac{d(xdy - ydx)}{dt^2} = Py - Qx$$

Da nun die Kraft F beständig nach dem Coordinatenanfangspunkt gerichtet ist, so haben wir:

$$\frac{P}{Q} = \frac{x}{y}$$

$$Py - Qx = 0$$

Integriren wir daher, so wird:

$$xdy - ydx = Cdt$$

oder, wenn wir wieder Polarcoordinaten anwenden:

$$r^2 d\omega = Cdt$$

Die Ausdrücke links sind aber das Doppelte des in dem Zeitelement dt vom Radius-vector beschriebenen Elementarsectors, wir finden also, daß bei Centralbewegungen der vom Radius-vector beschriebene Flächenraum der Zeit proportional ist, in der er beschrieben wird.

Führen wir den hier erhaltenen Werth $dt = \frac{r^2 d\omega}{c}$ in unsere Gleichung (II) ein, so wird:

$$mC^2 \left[\left(\frac{dr}{r^2 d\omega} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] = -2 \int F dr$$

$$mC^2 dr^2 + mC^2 r^2 d\omega^2 + 2r^4 d\omega^2 \int F dr = 0$$

$$r^2 d\omega^2 (mC^2 + 2r^2 \int F dr) = -mC^2 dr^2$$

$$\text{(IV)} \quad d\omega = \frac{Cdr}{r \sqrt{-C^2 - \frac{2r^2}{m} \int F dr}}$$

Die Constante C bestimmt sich durch die Anfangselemente der Bewegung. Bildet nämlich zur Zeit $t = o$ der anfängliche Radius-vector r_0 mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 den Winkel φ, so gestaltet sich die vorhin gegebene Gleichung des Flächenprincips $r^2 dw = Cdt$ jetzt um in:

$$\text{(V)} \quad C = r_0 v_0 \sin \varphi$$

Eine weitere Bemerkung ergiebt sich, wenn wir vom Centrum O das Perpendikel p auf die Tangente der von M beschriebenen

Bahn fällen. Es stellt dann pds ebenfalls den doppelten Elementarsector dar:

$$pds = r^2 d\omega = Cdt$$

$$p \cdot v = C$$

$$\text{(VI)} \qquad v = \frac{C}{p}$$

Die Geschwindigkeit ist also bei Centralbewegungen dem Abstand ihrer Richtung vom Centrum umgekehrt proportional.

Auch hieraus läßt sich die schon in (V) bestimmte Constante finden. Der anfängliche Abstand des Centrums O von der Richtung der v_0 ist:

$$p_0 = r_0 \sin \varphi$$

$$C = p_0 v_0 = r_0 v_0 \sin \varphi$$

Diese vorstehend entwickelten Gleichungen lassen sich nun direkt auf specielle Fälle übertragen. Gehen wir somit zur Behandlung des unsrigen über.

Der gegebene materielle Punkt von der Masse m sei M, das feste Centrum O sei Pol eines Polarcoordinatensystems und seine Entfernung von M der Radius-vector r, der zur Zeit $t = o$ mit der festen Axe des Coordinatensystems zusammenfalle und dann die Länge r_0 habe. Die Coordinatenebene, in der die ganze Bewegung des Punktes vor sich gehen muß, ist bestimmt durch r_0 und die auf dem Endpunkte von r_0 senkrecht stehende Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unseres Punktes.

Die auf M wirkenden Kräfte sind, wenn wir mit a und b die von denselben in der Einheit der Entfernung auf die Einheit der Masse ausgeübte Beschleunigung bezeichnen:

$$\text{mar und } \frac{mb}{r^3}$$

mar wirkt in dem Sinne, daß es den Punkt M dem Centrum O zu nähern, $\frac{mb}{r^3}$ daß es ihn davon zu entfernen strebt, die Gesammtkraft, die M nach O hinzieht, ist somit:

$$F = m\left(ar - \frac{b}{r^3}\right)$$

Daher haben wir mit directer Anwendung unserer Formel (III):

$$mv^2 = -2\int F dr = -2m\int\left(ar - \frac{b}{r^3}\right)dr$$

$$mv^2 = -m\left(ar^2 + \frac{b}{r^2}\right) + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmen wir aus dem Bewegungszustand zur Zeit $t = o$:

$$\text{Const.} = mv_0^2 + m\left(ar_0^2 + \frac{b}{r_0^2}\right)$$

$$mv^2 = mv_0^2 + m\left(ar_0^2 - ar^2 + \frac{b}{r_0^2} - \frac{b}{r^2}\right)$$

1) $$v^2 = v_0^2 + \left(r_0^2 - r^2\right)\left(a - \frac{b}{r_0^2 r^2}\right)$$

$$-2\int \frac{F}{m}\,dr = v_0^2 + \left(r_0^2 - r^2\right)\left(a - \frac{b}{r_0^2 r^2}\right)$$

Hierdurch und mit Berücksichtigung unserer Formel (IV) erhalten wir nun für den Winkel ω, unter welchem der Radius-vector gegen die feste Axe geneigt ist, die Gleichung

$$d\omega = \frac{C\,dr}{r\sqrt{-C^2 + r^2\left[v_0^2 + \left(r_0^2 - r^2\right)\left(a - \frac{b}{r_0^2 r^2}\right)\right]}}$$

Die Constante C bestimmt sich nach Formel (V); da hier $\varphi = 90^0$, so ist:

$$C = r_0 v_0$$

$$d\omega = \frac{r_0 v_0\,dr}{r\sqrt{-\left(r_0 v_0\right)^2 + \left(rv_0\right)^2 + \left(r_0^2 - r^2\right)\left(ar^2 - \frac{b}{r_0^2}\right)}}$$

$$d\omega = \frac{r_0 v_0\,dr}{r\sqrt{a}\ \sqrt{\left(r_0^2 - r^2\right)\left[r^2 - \left(\frac{b}{r_0^2 a} + \frac{v_0^2}{a}\right)\right]}}$$

Setzen wir jetzt $\frac{b}{r_0^2 a} + \frac{v_0^2}{a} = \gamma^2$ und berücksichtigen, daß $rdr = {}^1/_2\,dr^2$, so wird

2) $$d\omega = \frac{r_0 v_0}{2\sqrt{a}}\ \frac{dr^2}{r^2\sqrt{(r_0^2 - r^2)(r^2 - \gamma^2)}}$$

Setzen wir hier $r^2 = \frac{1}{x}$ so wird

$$d\omega = \frac{r_0 v^0}{2\sqrt{a}} \frac{d\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(r_0^2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \gamma^2\right)}}$$

oder da $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$:

$$d\omega = -\frac{r_0 v_0}{2\sqrt{a}} \frac{dx}{x\sqrt{-\frac{1}{x^2} + \left(r_0^2 + \gamma^2\right)\frac{1}{x} - r_0^2\gamma^2}}$$

$$\omega = -\frac{r_0 v_0}{2\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-1 - x(r_0^2 + \gamma^2) - x^2 r_0^2 \gamma^2}}$$

Dieses Integral läßt sich nun leicht berechnen nach der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin } \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}} + C$$

So wird

$$\omega = -\frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}} \text{ arc sin } \frac{2r_0^2\gamma^2 x - r_0^2 - \gamma^2}{\sqrt{-4r_0^2\gamma^2 + (r_0^2 + \gamma^2)^2}} + C$$

$$\omega = -\frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}} \text{ arc sin } \frac{\frac{2r_0^2\gamma^2}{r^2} - r_0^2 - \gamma^2}{\pm(r_0 - \gamma^2)} + C$$

$$C = \frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}} \text{ arc sin } \frac{r_0^2 - \gamma^2}{\pm(r_0^2 - \gamma^2)}$$

$$C = \frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}} \text{ arc sin } \pm 1$$

$$C = \frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}} (2n - 1)\frac{\pi}{2}$$

Dieses eingesetzt giebt uns:

$$\omega = \frac{v_0}{2\gamma\sqrt{a}}\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\frac{2r_0^2\gamma^2}{r^2} - r_0^2 - \gamma^2}{\pm(r_0^2-\gamma^2)}\right\}$$

$$\sin\left\{\frac{2\omega\gamma\sqrt{n}}{v_0} - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\frac{2r_0^2\gamma^2}{r^2} - r_0^2 - \gamma^2}{\mp(r_0^2-\gamma^2)}$$

Durch Zerlegung des sin der Differenz finden wir leicht

$$\sin\left\{\frac{2\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0} - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right\} = \pm\cos\frac{2\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}$$

und nach Einsetzung dieses Werthes

$$r^2 = \frac{2r_0^2\gamma^2}{r_0^2+\gamma^2-(r_0^2-\gamma^2)\cos 2\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}}$$

$$r^2 = \frac{2r_0^2\gamma^2}{r_0^2+\gamma^2-\left(r_0^2-\gamma^2\right)\left(2\cos^2\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}-1\right)}$$

3) $$r^2 = \frac{r_0^2\gamma^2}{\gamma^2\cos\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0} + r_0^2\sin^2\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}}$$

Um nun auch noch die Lage unseres Punktes als Function der Zeit t zu finden, gehen wir aus von Gleichung 2):

$$d\omega = \frac{r_0 v_0 dr}{r\sqrt{a}\ \sqrt{(r_0^2-r^2)(r^2-\gamma^2)}}$$

Beachten wir, daß $r^2 d\omega = r_0 v_0 dt$, $rdr = \frac{1}{2}dr^2$, und setzen dieses ein, so ist

$$\frac{r_0 v_0 dt}{r^2} = \frac{r_0 v_0 dr}{r\sqrt{a}\ \sqrt{(r_0^2-r^2)(r^2-\gamma^2)}}$$

oder $r^2 = x$, $2rdr = dx$ gesetzt:

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{dx}{\sqrt{(r_0^2 - x)(x - \gamma^2)}}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{dx}{\sqrt{-\gamma^2 r_0^2 + (r_0^2 + \gamma^2)x - x^2}}$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integriren und giebt:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin \frac{2x - (r_0^2 + \gamma^2)}{\sqrt{r_0^4 + \gamma^4 + 2r_0^2\gamma^2 - 4r_0^2\gamma^2}} + C$$

oder wieder $x = r^2$ gesetzt:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin \frac{2r^2 - (r_0^2 + \gamma^2)}{r_0^2 - \gamma^2} + C$$

Aus den Bedingungen für $t = o$ finden wir

$$C = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin 1 = -\frac{\pi}{4\sqrt{a}}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\arcsin \frac{2r^2 - (r_0^2 + \gamma^2)}{r_0^2 - \gamma^2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin\left(2t\sqrt{a} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2r^2 - (r_0^2 + \gamma^2)}{r_0^2 - \gamma^2}$$

$$r^2 = \tfrac{1}{2}\left[r_0^2 + \gamma^2 + (r_0^2 - \gamma^2) \cos 2t\sqrt{a}\right]$$

4) $$r^2 = r_0^2 \cos^2 t\sqrt{a} + \gamma^2 \sin^2 t\sqrt{a}$$

Da durch Gleichung 1, 3, 4 die Bewegung unseres Punktes in jeder Hinsicht bestimmt ist, können wir nunmehr zur Discussion der Trajectorie schreiten.

Unterwerfen wir zu dem Zwecke unsere Gleichung 3 einer wiederholten Differentiation.

Setzen wir $\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0} = \varphi$, so ist:

$$r^2 = \frac{r_0^2\gamma^2}{\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{r_0\gamma^2\sqrt{a}}{2v_0}(\gamma^2 - r_0^2)\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$\frac{d^2r}{d\omega^2} = \frac{r_0\gamma^3 a}{v_0^2}(\gamma^2 - r_0^2)\frac{-(\gamma^2 - r_0^2)\cos^4\varphi + 2\gamma^2\cos^2\varphi - r_0^2}{\sqrt{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^5}}$$

$$\frac{d^3r}{d\omega^3} = (\gamma^2 - r_0^2)\frac{r_0\gamma^4\sqrt{a^3}}{v_0^4}\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^4\varphi}\,\frac{4\sqrt{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^5}}{[(\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi - \gamma^2] + 5[-(\gamma^2 - r_0^2)\cos^4\varphi + 2\gamma^2\cos^2\varphi - r_0^2]}$$

$$\frac{(\gamma^2 - r_0^2)\sqrt{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^3}}{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^5}$$

$$\frac{d^3r}{d\omega^3} = (\gamma^2 - r_0^2)\frac{r_0\gamma^4\sqrt{a^3}}{v_0^4}\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^4\varphi}\,\frac{(\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi}{[-(\gamma^2 - r_0^2)(4 + \cos^2\varphi) + 10\gamma^2] + 5r_0^4 - 9r_0^2\gamma^2}{\sqrt{[(\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi + r_0^2]^7}}$$

Zur Bestimmung der Maxima und Minima des Radius-vectors setzen wir $\frac{dr}{d\omega} = 0$, wodurch wir erhalten $\sin\varphi = 0$ oder

$$2\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

Dieſes iſt erfüllt für

1) $\sin \varphi = 0$ $\varphi = n\pi$

2) $\cos \varphi = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$

wo n eine ganze Zahl, 0 inclusive.

Nun wird für

1) $\varphi = n\pi$

$$\frac{d^2r}{d\omega^2} = (\gamma^2 - r_0^2)\frac{r_0 a}{v_0} \begin{cases} \text{positiv für } \gamma^2 > r_0^2 \\ 0 \text{ für } \gamma^2 = r_0^2 \\ \text{negativ für } \gamma^2 < r_0^2 \end{cases}$$

2) $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$

$$\frac{d^2r}{d\omega^2} = -(\gamma^2 - r_0^2)\frac{\gamma^3 a}{r_0^2 v_0^2} \begin{cases} \text{positiv für } \gamma^2 < r_0^2 \\ 0 \text{ für } \gamma^2 = r_0^2 \\ \text{negativ für } \gamma^2 > r_0^2 \end{cases}$$

Wir haben ſomit 3 Fälle zu unterſcheiden:

1) $\gamma^2 < r_0^2$; es tritt ein das

Maximum $r = r_0$ für $\varphi = n\pi$

Minimum $r = \gamma$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$

2) $\gamma^2 > r_0^2$; es tritt ein das

Maximum $r = \gamma$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$

Minimum $r = r_0$ für $\varphi = n\pi$.

3) $\gamma^2 = r_0^2$; es tritt weder Maximum noch Minimum ein, die Curve iſt der mit dem Radius r_0 um O beſchriebene Kreis. Wir können daher bei den weiteren Betrachtungen dieſen Fall 3 ganz außer Acht laſſen.

Zur Ermittlung weiterer ausgezeichneter Punkte unserer Curve setzen wir $\frac{d^2r}{d\omega^2} = 0$,

dann muß sein

$$\cos^4\varphi - 2\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - r_0^2}\cos^2\varphi + \frac{r_0^2}{\gamma^2 - r_0^2} = 0$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{\gamma^2 - r_0^2}$$

Ob ein Wendepunkt an dem dieser Bedingung genügenden Punkte der Curve sich befindet, entscheidet der Werth, den der dritte Differentialquotient nach Einsetzung obigen Ausdruckes annimmt; es wird:

$$\frac{d^3r}{d\omega^3} = (\gamma^2 - r_0^2)\frac{r_0\gamma^4\sqrt{a^3}}{v_0^2}\sqrt{\frac{\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{\gamma^2 - r_0^2}}\,\frac{-\gamma^4 + \gamma^4}{}$$

$$\frac{+ r_0^4 - r_0^2\gamma^2 \pm 2\gamma^2\sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{(\gamma^2 - r_0^2)^2}\,\frac{\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{}$$

$$\frac{[-4(\gamma^2 - r_0^2) - \gamma^2 \mp \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - \gamma_0^2\gamma^2} + 10\gamma^2] - 5r_0^4 - 9r_0^2\gamma^2}{\sqrt{(\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2} + r_0^2)^7}}$$

$$\frac{d^3r}{d\omega^3} = \frac{r_0\gamma^4\sqrt{a^3}}{v_0^2}\sqrt{\frac{-(\gamma^4 + r_0^4) \mp (\gamma^2 + r_0^2)\sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{4[\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2 \pm (\gamma^2 + r_0^2)\sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}}$$

$$\sqrt{(\gamma^2 \pm r_0^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2})^7}$$

$\frac{d^3r}{d\omega^3}$ wird für das obere Zeichen imaginär, da dann der Ausdruck unter dem ersten Wurzelzeichen negativ ist, reell dagegen für das untere Zeichen. Es entsprechen somit dem Winkel

$$\varphi = \text{arc cos}\sqrt{\frac{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{\gamma^2 - r_0^2}}$$

reelle Punkte der Curve, Wendepunkte, für die

$$r^2 = \frac{r_0^2\gamma^2}{\gamma^2 + r_0^2 - \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}$$

Ohne Einfluß auf den Ort des Wendepunkts ist es ob $\gamma \gtrless r_0$, d. h. vertauschen γ und r_0 ihre Werthe, so bleibt der Ort des Wendepunkts doch derselbe, vertauscht wird in diesem Falle allein der jedesmalige Uebergang der Curve von der Concavität in die Convexität und umgekehrt.

Rückkehrpunkte oder Spitzen finden wir bei unserer Curve nicht. Um darüber zu entscheiden, ob, wenn und in welcher Anzahl vielfache Punkte vorhanden sind, stellen wir erst folgende Betrachtung an, die uns Aufschluß giebt über die Hauptgestaltungen, die unsere Curve annehmen kann.

Wie wir gesehen haben, beginnt die von dem Punkt M beschriebene Curve für $\gamma^2 < r_0^2$ mit einem Maximum, für $\gamma^2 > r_0^2$ mit einem Minimum; in beiden Fällen tritt dasselbe wieder ein für $\varphi = n\pi$ oder $\omega = \frac{n\pi v_0}{\gamma\sqrt{a}}$, wo n die Werthe sämmtlicher ganzen Zahlen von o inclusive bis ∞ enthält. Es kommt somit für die Anzahl der Umläufe der Curve um O, bis dieselbe zu einer geschlossenen wird, auf das Verhältniß von $\frac{\pi v_0}{\gamma\sqrt{a}}$ zu 360^0 an, und zwar finden wir, daß wenn:

1) $\frac{2\pi\gamma\sqrt{a}}{\pi v_0} = \frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0}$ eine ganze Zahl ist, die Curve nach einmaligem Umlauf um O wieder an ihren Ausgangspunkt zurückkehrt, also aus einem einzigen geschlossenen Zuge besteht.

2) $\frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0}$ ein Bruch oder eine gemischte Zahl $= \frac{p}{q}$ ist, die Curve erst nach q Umläufen um O zu einer geschlossenen wird.

3) $\frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0}$ irrational ist, die Curve nie zu einer geschlossenen werden kann, in unendlich vielen Umläufen um O besteht.

Im ersten Falle finden wir nun bei unserer Annahme, daß alle gegebenen Größen positiv sind, keine vielfachen Punkte, dagegen muß sich, wie leicht zu sehen, im zweiten und dritten Falle die Curve wieder schneiden, und zwar im dritten Falle unendlich oft, im zweiten Falle ist, wenn m die Summe der Anzahl der Maxima und Minima beim einmaligen Umlauf der Curve, q die Anzahl der Umläufe bedeutet, die Anzahl der Schnittpunkte

$$m\,\frac{q(q-1)}{2}$$

was auch auf Fall 3, wo $q=\infty$ und Fall 1, wo $q=1$ angewandt die Anzahl der Schnittpunkte hier als ∞ und O giebt.

Gehen wir, nachdem so die ausgezeichneten Punkte unserer Curve ermittelt sind, weiter zur Bestimmung der Tangente, Normale Polarsubtangente, Polarsubnormale und des Krümmungsradius, so finden wir in Anwendung der allgemeinen Formeln:

$$T = r\sqrt{1 + \left(\frac{r\,d\omega}{dr}\right)^2}$$

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$$

$$Sbtg = r^2 \frac{d\omega}{dr}$$

$$Sbn = \frac{dr}{d\omega}$$

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\omega^2}}$$

$$T = \frac{r_0\gamma}{\sqrt{\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi}}\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^2}{\gamma^2 a(\gamma^2 - r_0^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}$$

$$T = \frac{r_0}{(\gamma^2 - r_0^2)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{a(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)}}\sqrt{(\gamma^2 - r_0^2)^2\cos^4\varphi(v_0^2 - \gamma^2 a) + (\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi[2v_0^2 r_0^2 + \gamma^2 a(\gamma^2 - r_0^2)] + v_0^2 r_0^4}$$

$$N = \sqrt{\frac{r_0^2\gamma^2}{\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi} + \frac{r_0^2\gamma^4 a(\gamma^2 - r_0^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{v_0^2(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$N = \frac{r_0\gamma}{v_0\sqrt{(\gamma^2\cos^2\varphi + r_0^2\sin^2\varphi)^3}}\sqrt{(\gamma^2 - r_0^2)^2\cos^4\varphi(v_0^2 - \gamma^2 a) + (\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi[2v_0^2 r_0^2 + \gamma^2 a(\gamma^2 - r_0^2)] + v_0^2 r_0^4}$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{2r_0 v_0 \sqrt{\gamma^2 \cos^2\varphi + r_0^2 \sin^2\varphi}}{\sqrt{a}\,(\gamma^2 - r_0^2)\sin^2\varphi}$$

$$\mathrm{Sbn} = \frac{r_0 \gamma^2 \sqrt{a}\,(\gamma^2 - r_0^2)\sin 2\varphi}{\sqrt{(\gamma^2 \cos^2\varphi + r_0^2 \sin^2\varphi)^3}}$$

$$\rho = -\frac{\left\{(\gamma^2 - r_0^2)^2 \cos^4\varphi\,(v_0^2 - \gamma^2 a) + (\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi\,[2v_0^2 r_0^2 + (\gamma^2 - r_0^2)^2 \cos^4\varphi\,(v_0^2 - \gamma^2 a + 2(\gamma^2 - r_0^2)\cos^2\varphi\,(v_0^2 r_0^2 - \gamma^2 a\,(\gamma^2 - r_0^2)] + v_0^2 r_0^4\right\}^{\frac{3}{2}}}{\gamma^2 a r_0^2) + v_0^2 r_0^4 + \gamma^2 a r_0^2\,(\gamma^2 - r_0^2)}$$

Nachdem nun im Vorhergehenden das Geometrische der von dem Punkt M beschriebenen Bahn abgehandelt ist, wenden wir uns zur näheren Betrachtung der Bewegung selbst. Wie wir sehen, bewegt sich der Punkt M continuirlich um das anziehende Centrum O, und zwar bleibt seine Entfernung von demselben immer zwischen den Grenzen r_0 und γ; er bewegt sich also innerhalb des Kreisringes, der gebildet ist von den mit den Radien r_0 und γ um O beschriebenen Kreisen, die der Punkt im Maximum und Minimum seiner Entfernung von O berührt.

Der Ort des Punktes M zu irgend einer Zeit war bestimmt durch Gleichung 4)

$$r^2 = r_0^2 \cos^2 t\sqrt{a} + \gamma^2 \sin^2 t\sqrt{a}$$

Beschränken wir uns bei Betrachtung dieser Beziehung darauf, zu ermitteln, wann der Punkt sich in der größten und in der kleinsten Entfernung von O befindet, so finden wir durch Differentiation der Gleichung 4)

$$r\frac{dr}{dt} = \sin t\sqrt{a}\ \cos t\sqrt{a}\ (\gamma^2 - r_0^2)\sqrt{a}.$$

Maximum oder Minimum tritt ein für $\frac{dr}{dt} = o$, also wenn

1) $\gamma = r_0$ Fall des Kreises, den wir nicht berücksichtigen

2) $\sin t\sqrt{a} = o$ $\qquad t\sqrt{a} = n\pi$

2) $\cos t\sqrt{a} = o$ $\qquad t\sqrt{a} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$

Der zweite Differentialquotient ist dann hier:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a(\gamma^2 - r_0^2)\cos 2t\sqrt{a}}{\sqrt{r_0^2 \cos^2 t\sqrt{a} + \gamma^2 \sin^2 t\sqrt{a}}}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a(\gamma^2 - r_0^2)\cos 2t\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{1}{2}[r_0^2 + \gamma^2 + (r_0^2 - \gamma^2)\cos 2t\sqrt{a}}}$$

Nun ist für

$t\sqrt{a} = n\pi$ $\qquad\qquad$ $\cos 2t\sqrt{a} = +1$

$t\sqrt{a} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\cos 2t\sqrt{a} = -1$

somit für

1) $t\sqrt{a} = n\pi$; $\qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a(\gamma^2 - r_0^2)}{r_0^2}$ { positiv für $\gamma^2 > r_0^2$ / negativ für $\gamma^2 < r_0^2$

2) $t\sqrt{a} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$; $\quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{a(\gamma^2 - r_0^2)}{r_0^2}$ { positiv für $\gamma^2 < r_0^2$ / negativ für $\gamma^2 > r_0^2$

Ist somit $r_0 > \gamma$, so tritt ein das

Maximum $r = r_0$ für $t = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$

Minimum $r = \gamma$ für $t = \frac{2n-1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2}$

Ist $r_0 < \gamma$ so tritt ein

Maximum $r = \gamma$ für $t = \frac{2n-1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2}$

Minimum $r = r_0$ für $t = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt M bewegt, ist uns bereits gegeben durch Gleichung 1

$$v^2 = v_0^2 + (r_0^2 - r^2)\left(a - \frac{b}{r_0^2 r^2}\right)$$

Um das Maximum und Minimum derselben zu bestimmen, benutzen wir am einfachsten unsere allgemeine Relation (VI) $v = C:p$,

wo p die Länge des von O auf die Tangente der Curve gefällten Lothes ist. Wir bemerken so, daß einem Minimum von p ein Maximum von v, einem Maximum von p ein Minimum von v entspricht. Es findet nun aber, da $p = r \sin \vartheta$, wo ϑ der Winkel des Radius vector mit der Tangente ist, das Maximum und Minimum von p statt zugleich mit dem von $r \sin \vartheta$, welches eintritt für $\vartheta = 90^0$ und $r = r_0$ resp. $r = \gamma$. So finden wir, daß wenn

1) $r_0 < \gamma$, für v stattfindet

Maximum $v = v_0$ für $r = r_0$

Minimum $v = \frac{v_0 r_0}{\gamma}$ für $r = \gamma$.

2) $r_0 > \gamma$ für v stattfindet

Maximum $v = \frac{v_0 r_0}{\gamma}$ für $r = \gamma$

Minimum $v = v_0$ für $r = r_0$.

Da C hier $= r_0 v_0$, so folgt leicht die Beziehung $p \cdot v = r_0 v_0$, d. h.: für jeden Punkt der Curve ist das Product aus dem von O auf die Tangente gefällten Lothe und der jedesmaligen Geschwindigkeit des Punktes constant gleich dem Product aus dem anfänglichen Radius vector und der Anfangsgeschwindigkeit.

Da für $\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{dr}{r d\omega} = 0$ d. i.

$$\frac{\gamma \sqrt{a}\,(\gamma^2 - r_0^2) \sin 2\varphi}{2 v_0^2 (\gamma^2 \cos^2 \varphi + r_0^2 \sin^2 \varphi)} = 0$$

die Tangente auf dem Radius vector senkrecht steht, so fallen hier Radius vector, Normale und das Loth von O auf die Tangente zusammen, dieses findet statt für $\sin 2\varphi = 0$, also für $\varphi = n\pi$ und $\varphi = (2n - 1)\pi$, in den Fällen der Maxima und Minima von r.

Um über die Bewegung des Punktes in Richtung des Radius vector Näheres zu erfahren, bilden wir

$$v\frac{dv}{dr} = \frac{b - r^4 a}{r^3}$$

$$\frac{dv}{dr} = o \text{ für } r = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{3b + r^4 a}{vr^4} \text{ eingesetzt } r = \sqrt[4]{\frac{b}{a}} \text{ wird:}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{4a}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2 a - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{r_0^2}}}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{4a}{\sqrt{v_0^2 + \left(r_0\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{r_0}\right)^2}} \text{ also negativ.}$$

Es findet somit für $r = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ ein Maximum der Geschwindigkeit statt in Richtung des Radius-vector. Die Beschleunigung ist hier in dieser Richtung $= o$, wie es auch ja sein muß, da sich hier beide Kräfte ar und $\frac{b}{r^3}$ das Gleichgewicht halten, der Punkt, der für $v_0 = o$ eine pendelnde Bewegung hat, durch seine Gleichgewichtslage geht.

Wenden wir uns nun, nachdem wir im Vorhergehenden die Bewegung unseres Punktes M vollständig bestimmt haben, zur Construction der von ihm beschriebenen Curve. Diese ergiebt sich einfach aus unserer Hauptgleichung

$$r^2 = \frac{r_0^2 \gamma^2}{\gamma^2 \cos^2\varphi + r_0^2 \sin^2\varphi}$$

wo bekanntlich $\varphi = \frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0} = \omega k$.

Betrachten wir nun hier r und φ als zusammengehörige Coordinaten, so ist obige Gleichung die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit den beiden Axen r_0 und γ. Ist also O der Coordinatenanfangspunkt und in A auf dem Endpunkt der einen Axe OA der Ellipse mit den Axen r_0 und γ die Anfangslage unseres Punktes, so finden wir seine Lage auf dem zum Winkel ω gehörigen Radius vector OX, indem wir an OA den Winkel $k\omega = \varphi$ antragen, den zugehörigen Radius OB der Ellipse ziehen und dann die Strecke OB von O aus auf OX bis P abtragen. P ist dann der gesuchte Curvenpunkt. Auf diese Weise lassen sich alle Punkte, somit die ganze Curve construiren.

Eine andere Art der Construction ist natürlich auch möglich durch Berechnung der einzelnen Curvenpunkte im Anschluß an die entwickelten Gleichungen. So wollen wir den Verlauf bestimmen für den einfachen Fall $\omega = \frac{1}{3}\varphi = \frac{1}{3}\frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}$; dann ist $\frac{\gamma\sqrt{a}}{v_0} = 3$, oder den Werth für γ eingesetzt: $\sqrt{\frac{b}{r_0^2 v_0^2} + 1} = 3$, woraus

$$\gamma^2 = \frac{9v_0^2}{a} \qquad r_0^2 = \frac{b}{8v_0^2}$$

Hier können wir r_0 und γ noch beliebig bestimmen und setzen $r_0 = 4$; $\gamma = 3$;

$$16 = \frac{b}{8v_0^2} \qquad 9 = \frac{9v_0^2}{a}$$

$$128 = \frac{b}{v_0^2} \qquad a = v_0^2$$

Von diesen 3 durch 2 Gleichungen verbundenen Größen ist wiederum 1 beliebig. Setzen wir $v_0 = 1$ so ist $a = 1$; $b = 128$ und wir haben

$$r^2 = \frac{144}{9\cos^2 3\omega + 16\sin^2 3\omega}$$

als Gleichung der Curve, die beschrieben wird von dem materiellen Punkte, der von dem Centrum O mit der Kraft $F = m\left(r - \frac{128}{r^3}\right)$ angezogen wird und zur Zeit $t = o$ die Entfernung 4 von O und eine auf dieser Entfernung senkrechte Anfangsgeschwindigkeit 1 hat.

Da hier $\frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0}$ eine ganze Zahl ist, so ist die Curve eine geschlossene, die nur einmal um O herumgeht. Maxima der Entfernung finden hier, da $r_0 > \gamma$, statt für $r = 4$; $\omega = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}(2n-1)$ $= (2n-1)\,30^0$, also wenn ω die Werthe annimmt:

30^0; 90^0; 150^0; 210^0; 270^0; 330^0;

Minima für $r = 3$; $\omega = \frac{1}{3}\pi n = n60^0$, also für $\omega =$

60^0; 120^0; 180^0; 240^0; 300^0; 360^0.

Für Wendepunkte fanden wir

$$r^2 = \frac{r_0^2\gamma^2}{\gamma^2 + r_0^2 - \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + r_0^4 - r_0^2\gamma^2}}{\gamma^2 - r_0^2}$$

Es tritt danach hier ein Wendepunkt ein für

$$r^2 = \frac{144}{25 - \sqrt{256 + 81 - 144}} = \frac{144}{25 - 13{,}9} = \frac{144}{11{,}1} = 13$$

$$r = \sqrt{13} = 3{,}6$$

$$\cos^2\varphi = \frac{16 - 13{,}9}{7} = 0{,}3$$

$$\cos\varphi = \sqrt{0{,}3} = \pm\ 0{,}548$$

Da nun $\cos\varphi = \cos\varphi$

$\cos\varphi = -\cos(180^0 - \varphi)$

$\cos\varphi = -\cos(180^0 + \varphi)$

$\cos\varphi = \cos(360^0 - \varphi)$

so haben wir hier $\varphi = 56^0\ 45'$; $\varphi = 123^0\ 15'$; $\varphi = 236^0\ 45'$; $\varphi = 303^0\ 15'$ ꝛc.

und für ω die Werthe: $\omega = 18^0\ 55'$; $41^0\ 5'$; $78^0\ 55'$; $101^0\ 5'$; $138^0\ 55'$; $161^0\ 5'$; $198^0\ 55'$; $221^0\ 5'$; $258^0\ 55'$; $281^0\ 5'$; $318^0\ 55'$; $341^0\ 5'$.

Hätten wir die bestimmenden Größen so gewählt, daß

$$r_0 = 4;\quad \gamma = 3;$$

also die Werthe von r_0 und γ vertauscht, so hätten wir, wie leicht einzusehen, eine der vorigen congruente Curve erhalten, die sich von derselben nur durch ihre Lage zum Coordinatensystem unterscheidet, und direct in dieselbe übergeht durch eine Drehung von 30° um den Coordinatenanfangspunkt, gleichgültig in welchem Sinne.

Die Größen a und b, die im ersten Falle bestimmt waren durch die Gleichungen:

$$b = 128 v_0^2 \qquad a = v_0^2$$

sind in diesem zweiten Falle

$$b = \tfrac{9}{16}\,128 v_0^2 = 72\, v_0^2; \qquad a = \tfrac{9}{16} v_0^2.$$

In beiden Fällen muß somit sein:

$$128 = \frac{b}{a}$$

und a und b sind fest bestimmt durch Annahme eines bestimmten v_0. Da wir aber in der Annahme dieser Größe ganz unbeschränkt sind, so können wir uns die Bewegung des Punktes in der obigen Curve auf unendlich viele Arten hervorgerufen denken durch die Einwirkung einer anziehenden und einer abstoßenden Kraft, die dadurch von einander abhängig sind, daß die von ihnen in der Einheit der Entfernung auf die Einheit der Masse ausgeübten Beschleunigungen a und b in dem Verhältniß stehen müssen $b : a = 128$.

Ein unserem vorstehend abgeleiteten ähnliches Resultat wird sich in jedem Falle ergeben, wo von einem festen Centrum aus auf einen materiellen Punkt proportional seiner Masse eine anziehende und eine abstoßende Kraft in der Weise wirken, daß die erstere direct, die letztere umgekehrt proportional ist einer Potenz der Entfernung des Punktes von dem festen Centrum.

In allen Fällen wird der Punkt M, falls er zur Zeit $t = o$ keine Anfangsgeschwindigkeit hat und sich nicht in seiner Gleichgewichtslage befindet, d. h. in der Lage, wo die auf ihn wirkenden beiden Kräfte gleich und entgegengesetzt sind, eine pendelnde Bewegung beschreiben. Hat er eine Anfangsgeschwindigkeit, so wird sich diese mit der pendelnden combiniren und der Punkt wird sich in einer Curve bewegen, deren Gestalt im Allgemeinen besonders von den gegebenen Potenzen der Entfernung abhängen wird und in jedem einzelnen Falle durch Einsetzung der gegebenen Bedingungen in unsere anfangs entwickelten Gleichungen zu bestimmen ist. Fällt die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit zusammen mit der Richtung der Attractionskräfte, so reducirt sich, wie leicht zu sehen, die Curve auf eine gerade Linie.

Unseren in der vorhin behandelten Aufgabe entwickelten Gleichungen besonders analoge Formeln erhalten wir für die Annahme, daß die anziehende Kraft proportional der qten Potenz, die abstoßende umgekehrt proportional der $(q + 2)$ten Potenz der Entfernung. Die Gesammtkraft ist dann

$$F = m\left(ar^q - \frac{b}{r^{q+2}}\right)$$

und wir haben

$$mv^2 = -2\int F dr = -2m\int\left(ar^q - \frac{b}{r^{q+2}}\right)dr$$

$$v^2 = -2\left(\frac{a}{q+1}r^{q+1} + \frac{b}{q+1}\frac{1}{r^{q+1}}\right) + C$$

$$C = v_0^2 + 2\left(\frac{a}{q+1}r_0^{q+1} + \frac{b}{q+1}\frac{1}{r_0^{q+1}}\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\left[\frac{a}{q+1}\left(r_0^{q+1} - r^{q+1}\right) - \frac{b}{q+1}\left(\frac{1}{r_0^{q+1}} - \frac{1}{r^{q+1}}\right)\right.$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{q+1}\left(r_0^{q+1} - r^{q+1}\right)\left(a - \frac{b}{r_0^{q+1}\,r^{q+1}}\right)$$

Für den Winkel ω erhalten wir, falls wir auch hier wieder die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nehmen zu der Verbindungslinie des Punktes mit dem Centrum, dem Radius-vector, nach Formel (IV):

$$d\omega = \frac{C\,dr}{r\sqrt{-C^2 - \frac{2r^2}{m}\int F dr}}$$

$$d\omega = \frac{r_0 v_0 dr}{r\sqrt{-r_0^2 v_0^2 + r^2\left[v_0^2 + \frac{2}{q+1}\left(r_0^{q+1} - r^{q+1}\right)\left(a - \frac{b}{r_0^{q+1}\,r^{q+1}}\right)\right.}}$$

$$d\omega = \frac{r_0 v_0\,dr}{r\sqrt{\frac{2r^2}{q+1}\left(r_0^{q+1} - r^{q+1}\right)\left(a - \frac{b}{r_0^{q+1}\,r^{q+1}}\right) - v_0^2(r_0^2 - r^2)}}$$

$$d\omega = \frac{r_0 v_0 \, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{q+1}\left[\left(a r_0^{q+1} + \frac{b}{r_0^{q+1}} + \frac{v_0^2 (q+1)}{2}\right) - \left(a r^{q+1} + \frac{b}{r^{q+1}} + \frac{r_0^2 v_0^2 (q+1)}{2r^2}\right)\right]}}$$

$$\omega = \int \frac{r_0 v_0 \, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{q+1}\left[\left(a r_0^{q+1} + \frac{b}{r_0^{q+1}} + \frac{v_0 (q+1)}{2}\right) - \left(a r^{q+1} + \frac{b}{r^{q+1}} + \frac{r_0^2 v_0^2 (q+1)}{2r^2}\right)\right]}}$$

Ich halte es hier wohl am Platze, auf eine schon 1870 in den „nouvelles annales de mathématiques“ pag. 439 erschienene Abhandlung des Herrn Graindorge zu verweisen, deren Titel: „Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un centre: l'une attractive et proportionelle à la distance, l'autre répulsive et en raison du cube de la distance. On suppose la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.“

Herr Graindorge führt hier diese Betrachtung auf etwas anderem Wege aus. Statt der von uns eingeführten Größe

$$\gamma = \sqrt{\frac{b}{r_0^2 a} + \frac{v_0^2}{a}}$$ setzt er $\alpha = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0 r_0}$

und erhält so, indem er statt unserer Größen a, b, ω entsprechend μ, μ', ϑ setzt, die beiden Hauptgleichungen

$$3\alpha) \quad r^2 = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2 \cos^2 \alpha\vartheta + \mu r_0^2 \sin^2 \alpha\vartheta}$$

$$4\alpha) \quad \mu r^2 = \alpha^2 v_0^2 \sin^2 t\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2 t\sqrt{\mu}$$

unseren Gleichungen 3) und 4) entsprechend und direct in dieselben übergehend, wenn wir setzen $\alpha = \gamma\frac{\sqrt{a}}{v_0}$; $\vartheta = \omega$; $\mu = a$. Wir erhalten so, indem in 3α) und 4α) a fortfällt

$$3) \quad r^2 = \frac{\gamma^2 r_0^2}{\gamma^2 \cos^2 \frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0} + r_0^2 \sin^2 \frac{\omega\gamma\sqrt{a}}{v_0}}$$

$$4) \quad r^2 = \gamma^2 \sin^2 t\sqrt{a} + r_0^2 \cos^2 t\sqrt{a}$$

Sowohl wegen der einfacheren Gestaltung obiger Gleichungen als auch besonders wegen der Wichtigkeit der Größe γ für die Discussion, scheint mir die Einführung von $\gamma = \sqrt{\frac{b}{r_0^2 a} + \frac{v_0^2}{a}}$ glücklicher gewählt zu sein als die von $\alpha = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0^2 r_0^2}$. Bei der Discussion beschränkt sich Herr Graindorge allein auf den Fall $\mu r_0^2 - \alpha^2 v_0^2 > 0$ d. h. $\gamma^2 < r_0^2$, und dehnt dieselbe besonders dahin aus, wo die Größe α allein zur Geltung kommt, nämlich auf die 3 Fälle, wo die Curve

1) eine einfach geschlossene ist,
2) nach mehreren Umläufen um O zu einer geschlossenen wird,
3) keine geschlossene ist,

die dadurch bedingt sind, daß nach ihm

1) α eine ganze Zahl,
2) α eine gebrochene Zahl,
3) α eine incommensurable Zahl ist,

was wir ausgedrückt haben durch die Bedingung, daß $\frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0}$ eine ganze, gebrochene oder incommensurable Zahl sei.

Innerhalb des zweiten Falles macht Herr Graindorge dann noch wieder eine Unterscheidung, indem er sagt:

Deuxième cas: α fractionaire et égal à $\frac{p}{q}$

1) q pair: le point materiel revient au point de départ pour $\vartheta = q\pi$
2) q impair: le point materiel revient au point de départ pour $\vartheta = 2q\pi$.

Beide Fälle fallen bei uns zusammen, da, wenn wir jetzt den Bruch α als $\frac{p_1}{q_1}$ bezeichnen, $\frac{2\gamma\sqrt{a}}{v_0} = \frac{p}{q} = 2\alpha = \frac{2p_1}{q_1}$; ist hier q_1 gerade, so hebt sich die 2 im Nenner fort, und wir erhalten als Anzahl der Umläufe $\frac{1}{2}q_1$, ist q_1 ungerade, so bleibt q_1 in unserem, natürlich auf die kürzeste Form gebrachten Bruche $\frac{p}{q}$, wir erhalten somit beide Male q als Anzahl der Umläufe.

Druck von Gerhard Stalling, Oldenburg.